

TEOREMI
SULLE
SEZIONI CONICHE

UTILI ALLA RISOLUZIONE DI DIFFICILI PROBLEMI

dimostrati

DA

NICOLA TRUDI



NAPOLI

Nella stamperia per le opere del prof. Flauti

1840.

AL CHIARISSIMO PROF. CAV. FLAUTI.

Rispettabilissimo sig. cavaliere.

Il lusinghiero compatimento col quale avete accolto il mio lavoro sulle *polari coniche reciproche*, fino ad adoperarvi perchè comparisse in pubblico, mi dà coraggio a sottoporvi gli altri lavori, che vi accennai in quel rincontro. Di essi il presente contiene diversi teoremi sulle curve coniche parte nuovi, e parte già conosciuti, e che di grandissima utilità riescono nelle risoluzioni di difficili problemi geometrici, sia che trattinsi col metodo puro algebrico, sia coll' antica analisi. E per darne qualche pruova ne reco tre esempj, de' quali il primo riguarda una soluzione interamente nuova del famoso problema di Cramer esteso alle curve coniche; l' altro mostra come regga benanche per tali curve quell' importante lemma, che pel solo caso del

cerchio rilevasi dalla proposizione cxvii delle *Collezioni Matematiche* di Pappo . E nel terzo esempio osserverete una dimostrazione di quell'insigne proprietà delle curve coniche conosciuta col nome di *esagono mistico di Pascal* , che deriva per immediata conseguenza da taluno di essi teoremi . Ma sul primo , e secondo argomento dovrò ritornare in altri geometrici lavori , che vi presenterò appena mi sarà permesso ordinarli alla meglio .

Gradite le riproteste della riconoscenza, che vi debbo per tanti titoli , e del sincero rispetto , con cui mi ripeto,

Napoli 20 marzo 1839.

Vostro obbligatiss. servo
NICOLO' TAVVI

TEOREMA FONDAMENTALE

Il punto d' incontro di due corde di una curva conica , e quelli de' concorsi delle tangenti ne' loro estremi , sono alligati in una retta,

Dim. Sieno BD , CE due corde qualunque di una curva conica , A il punto in cui s' incontrano, ed H , K i punti di concorso delle tangenti in B , C ; D , E . fig. 1.

Producansi le tangenti de' punti B , D , finchè s' incontrino in F ; e fino a G le altre de' punti C , E . Sieno inoltre denotati con b , d , e , c i semidiametri rispettivamente paralleli alle tangenti in B , D , E , C . Ciò premesso tirinsi le HN , HM parallele alle KD , KE ; si avrà $CG : GE :: CH : HM$. Ma sta $CG : GE :: c : e$; starà perciò $CH : HM :: e : c$. Avendosi dunque $CH : BH :: e : b$, risulterà $HM : BH :: e : b$; e per essere $HN : BH :: DF : FB$, ossia $:: d : b$, si rileverà $HM : NH :: e : d$, cioè $:: KE : KD$. Quindi le DE , NM saranno parallele ; e la ragione di queste due rette sarà perciò eguale tanto a quella di $KE : HM$, quanto all' altra di $EA : AM$. In conseguenza queste due ultime ragioni saranno benanche eguali ; ed essendo KE parallela ad HM , i tre punti A , H , K dovranno star per dritto (*).

(*) Nella parabola le ragioni de' semidiametri sono rimpiazzate da quelle de' parametri de' diametri pe' contatti .

AFFERTIMENTO.

Quest' importante teorema , che tra poco vedremo secondo di molte utili verità , contenevasi in parte ne' Conici di Apollonio , d' onde forse lo avranno dedotto i più accurati trattatisti delle proprietà di tali curve. Ma neppure vedesi in questi esposto sotto forma abbastanza generale , e da convenire ad ogni caso. Più compiuto però ei si ravvisa ne' Conici del de la Hire. ma per riguardo al cerchio solo : e trovasi poi esteso alle altre curve coniche , benchè sotto diversa forma , tra le sei quistioni proposte da un distinto giovane matematico siciliano Ruggiero di Ventimiglia (*). Intanto senza tener noi presente tutto

(*) Non dovrà certamente riescir disastro a' nostri concittadini , che a questo proposito , si ricordi loro il nome di sì distinto giovane geometra , affatto dimenticato nella storia delle Matematiche , del pari che il libro da lui prodotto , e ciò che vi diede occasione .

Aveva il Viviani proposto a risolvere , per esercitare i geometri , dodici problemi sul triangolo , parte antichi , e parte nuovi , e non volendo egli mostrarsi , li aveva pubblicati con l' epigrafe di *geometra post tabulam latens*. Essi eran rimasti per ben quindici anni senza alcuna risposta , finchè il giovinetto siciliano , di appena 20 anni , Ruggiero di Ventimiglia , della nobilissima famiglia de' marchesi di Gerace , non gli avesse risolti , riducendoli a soli sei , e pubblicati nel 1690 , dando a questa sua risposta il titolo di *Sphinx geometra* , alludendo alla *Singa* di Edipo . Dopo ciò egli volle a sua posta riproporne un altro col titolo *Unum ad Omnes* ; e dopo altri tre anni , non vedendolo risoluto , nuovamente il ripropose , aggiugnendovi sei altri quesiti con l' epigrafe *Geometram quero* , de' quali il primo era così enunciato : *Danbus rectis contingentibus circumum , conicamus sectionem aut oppositas , et a concludibus , per binu perimetri puncta ductis quatuor rectis se se de-*

ciò , che dopo ci è stato dinotato , avvertiremo , che siffatta elegante proprietà delle curve coniche si è a noi presentata , come mostreremo in luogo opportuno , dal considerare sul noto teorema trigonometrico , che : *in ogni triangolo la somma di due lati sia alla loro differenza , come la tangente della semisomma degli angoli alla base sta alla tangente della loro semidifferenza* . Ma senza pretendere di darlo perciò come nuovo , faremo solo avvertire , che la dimostrazione congegnatavi sia applicabile ad ogni caso , ed è poggiata sopra un' ovvia proprietà delle sezioni coniche .

CONSEQUENZE DEL PRESENTE TEOREMA.

1.° Si congiungano le BE , DC ; il punto S di loro intersezione dovrà benanche star per dritto co' punti H , K . Quindi i quattro punti A , H , S , K staranno tutti in linea retta.

cussantibus extra perimetrum , in aliis duobus punctis , quae jungantur recta , dico hanc transireturam esse per punctum ubi contingentes occurrunt , vel si non occurrant , eisdem fore parallelam ; il quale come vedesi corrisponde al nostro *teorema fondamentale* : ma ben diversa n' è la dimostrazione da noi data , da quella che ne esibirono i risponditori a que' quesiti , Saccherio , o Giovanni Cova geometri rinomati per que' tempi , come può vedersi nella seconda edizione , che fu pubblicata della *Sphinx Geometra* in Parma nel 1694 . Ed è maraviglioso , che di questo libro per ben due volte stampato in Italia , in un secolo facendo l'ingegni , e citato con lode dal Grandi , del pari che del suo principale autore , nella sua *Geometrica dicinatio Vietsacorum problematum* , alcuna menzione non trovisi fatta non solo dagli storici delle Matematiche , ma nè tampoco dal Fabroni nella vita del Viviani .

II.* Si uniscano le BC , DE , e si producano finchè s'incontrino in I ; anche i quattro punti I , F , S , G dovranno trovarsi per dritto: e però le quattro rette BE , DC , HK , FG s'intersecano in un sol punto.

III.* Essendo i punti F , G poli (*) delle BD , CE ; sarà FG polare del punto A . Così pure HK sarà polare del punto I . Quindi il punto S , ove s'intersecano le due polari, sarà il polo della retta, che passa pe' punti A , I .

IV.* Suppongasi fisso il punto S , variando comunque la posizione delle BD , CE , la retta IA , ch'è polare di tal punto, sarà data di sito.

V.* Essendo la retta AE divisa in proporzione armonica ne' punti C , V , e dovendo ogni altra retta condotta per A rimanere similmente divisa dalle GC , GV , GE , ne segue, che la AK sia pure armonicamente divisa nei punti H , S .

fig. 2.

VI.* Se le corde BD , CE sien parallele, svanirà il punto A , e la HK risulterà parallela alle corde stesse.

VII.* In questo caso, inoltre, poichè la retta IS passa pe' poli F , G delle corde parallele BD , CE , sarà diametro della curva, e bisecando le corde, biseccherà pure la HK nel punto S .

VIII.* Supponendo fisso nel caso medesimo il punto S , il punto I sarà egualmente determinato. E viceversa dall'esser dato il punto I sarà dato il punto S .

(*) È da suppersi, che ormai sieno abbastanza comuni le nozioni su' poli, e sulle polari nella dottrina de' conici, di cui trovasi già detto quanto basta nelle note aggiunte dal prof. Flauti al *trattato analitico delle Sezioni Coniche del Fermata*; ed in altra memoria da noi pubblicata sulle *polari coniche reciproche*.

IX.* Finalmente essendo HK polare del punto I, il punto S avrà per polare la parallela condotta per I alla stessa HK.

Intanto osservando che la figura BDEC sia un quadrilatero iscritto nella curva, del quale BE, CD sono le diagonali, A, I i punti di concorso de' suoi lati opposti, ed H, F, K, G i poli de' lati BC, BD, DE, EC rispettivamente (*); ed osservando inoltre che la figura HFKG sia il corrispondente quadrilatero circoscritto, le conseguenze qui rilevate somministreranno i seguenti teoremi.

I.

Il punto di concorso di due lati opposti di un quadrilatero iscritto, i poli dei rimanenti due lati, e l' intersezione delle diagonali sono in linea retta.

(*) Siffatto quadrilatero iscritto risultando dal congiungere due a due quattro punti presi sulla curva, può anche prender la forma, che vedesi nella figura 3; e quindi il punto A, concorso delle DB, EC non può esistere nel prolungamento di due congiungenti opposte, ed al di fuori della curva; ma sibbene di due congiungenti trasversali, e dentro della curva medesima. Non però rimarranno alterate le proposizioni di sopra stabilite: sicchè essendo F polo di DB, G polo di CE, ed S il punto in cui s' incontrano le DC, EB, i tre punti F, S, G staranno per dritto, inaleme col punto I concorso de' lati CB, DE; e così pure staran per dritto i quattro punti A, H, S, K. A tal proposito conviene avvertire, che per una figura iscritta di n lati debba anche intendersi in generale qualunque figura, che risulta dal congiungere ciascuno degli n punti, presi sul perimetro della curva, una sol volta con due qualunque tra di essi punti, fino a che siano esauriti i punti medesimi. Così per esempio la fig. 4. offre una figura iscritta di cinque lati ab, bc, cd, de, ea , risultante dal congiungere, como si è detto, tra loro, i cinque punti a, b, c, d, e .

II.

Le diagonali de' quadrilateri iscritti, e circoscritti s' intersecano in un sol punto.

III.

La retta , che passa pe' punti di concorso de' lati opposti de' quadrilateri iscritti , è la polare del punto d' incontro delle diagonali .

IV.

Se le diagonali di un quadrilatero iscritto s' intersecano in un punto fisso , i lati opposti converranno due a due sopra una retta di sito , polare di quel punto.

V.

Se due de' lati opposti di un quadrilatero iscritto convengano in un punto fisso , le sue diagonali s' intersegheranno sopra una retta di sito , polare di quel punto.

VI.

La retta , che passa pe' poli di due lati opposti di un quadrilatero iscritto , pel punto di concorso degli altri due lati , e pel punto d' intersezione delle diagonali , rimane in questi quattro punti armonicamente divisa .

VII.

Ne' quadrilateri iscritti a lati paralleli , la congiungente de' poli de' lati convergenti , mentre è parallela a' lati paralleli , rimane divisa per metà nel punto d' incontro delle diagonali.

VIII.

Ne' quadrilateri iscritti a' lati paralleli , la retta che passa pel punto d' incontro de' lati convergenti , e per l' intersezione delle diagonali , è un diametro della curva.

IX.

Se le diagonali di un quadrilatero a lati paralleli s' intersecano

in un punto fisso, i lati convergenti converranno pure ad un punto fisso : e viceversa .

X.

Il punto d' incontro de' lati convergenti di un quadrilatero a lati paralleli ha per polare la congiungente de' poli de' lati medesimi.

XI.

La polare del punto d' intersezione delle diagonali di un quadrilatero a lati paralleli è la parallela a' lati medesimi , condotta dal punto d' incontro de' lati convergenti.

Oltre a queste verità altre non meno interessanti potrebbero dedursi dall'esposto teorema fondamentale ; ma noi abbiamo accennate quelle , di cui avremo bisogno nelle ricerche delle quali ci occupiamo . Della sua importanza , ed utilità faranno però miglior prova altri argomenti che in appresso tratteremo , avendoci con esso aperta la strada a tentar talune quistioni riconosciute generalmente di massima difficoltà . Inoltre è a notarsi come ne discendano intuitivamente tante conseguenze corrispondenti a verità parte nuove , parte conosciute , e che distinti geometri sonosi impegnati a dimostrare separatamente ; di che fan fede i varj articoli sparsi negli *Annali matematici* pubblicati dal sig. Gergonne.

2.° Passeremo intanto a dare della verità esposta poc' anzi un' analitica dimostrazione.

Si riferisca la curva a due assi l' un de' quali sia il diametro che passa pel punto , in cui s' incontrano le due corde , e l' altro la parallela condotta pel punto medesimo alla tangente nel

suo vertice. Potrà così, l'equazione della curva essere rappresentata dalla formola

$$y^2 = mx^2 + 2nx + s \quad (1)$$

e quella della tangente in un punto (x', y') del suo perimetro sarà in conseguenza espressa da

$$yy' = mx x' + n(x + x') + s \quad (2)$$

Or si chiamino x, v ; x', v' le coordinate delle estremità di una delle corde; e t, u ; t', u' quelle delle estremità dell'altra: le equazioni di tali corde saranno rispettivamente

$$y = \frac{v}{x} x \dots \dots (3), \quad y = \frac{u}{t} x \dots \dots (4)$$

Eliminando tra (1), e (3) una volta la y , ed una volta la x , avremo due equazioni di secondo grado; la prima delle quali avrà per radici x, x' , l'altra v, v' . Essendo dunque i coefficienti de' secondi termini di queste equazioni dinotati l'uno da $-\frac{2nx^2}{v^2 - mx^2}$, l'altro da $-\frac{2nv^2}{v^2 - mx^2}$, si otterranno, com'è noto dagli Elementi di Analisi algebrica

$$x + x' = \frac{2nx^2}{v^2 - mx^2}, \quad \text{e} \quad v + v' = \frac{2nxv}{v^2 - mx^2}$$

Dalle quali, dopo le riduzioni nascenti dall'equazione

$$v^2 = mx^2 + 2nx + s,$$

che regge in virtù della (1), si ricaverà

$$x' = \frac{-sx}{2nx + s}, \quad v' = \frac{-sv}{2nx + s} \quad (5)$$

Combinando tra loro nel modo stesso l'equazione (1), con la (4), rileveremo

$$t' = \frac{-st}{2nt + s}, \quad u' = \frac{-su}{2nt + s} \quad (6)$$

Ciò premesso esprimansi per (x'', y'') , (x''', y''') i due punti di concorso delle tangenti; dovranno per la (2) verificarsi le quattro equazioni

$$\begin{aligned}y''v &= mx'' + n(s + x'') + s \\y''u &= mt' + n(t + x') + s \\y'''v &= mz'' + n(z' + x''') + s \\y'''u &= mt'' + n(t' + x''') + s\end{aligned}$$

Le prime due daranno

$$\left. \begin{aligned}x'' &= \frac{-n(zu - tv) - s(u - v)}{m(zu - tv) + n(u - v)} \\y'' &= \frac{(ms - n^2)(z' - t')}{m(zu - tv) + n(u - v)}\end{aligned} \right\} \quad (7)$$

e le altre due

$$x''' = \frac{-n(z'u' - t'v') - s(u' - v')}{m(z'u' - t'v') + n(u' - v')}$$

ed

$$y''' = \frac{(ms - n^2)(z' - t')}{m(z'u' - t'v') + n(u' - v')}$$

ovvero, sostituendo a z' , t' , u' , v' ; i loro valori assegnati in (5), e (6),

$$\left. \begin{aligned}x''' &= \frac{ns(zu - tv) + s^2(u - v)}{(ms - 2n^2)(zu - tv) - ns(u - v)} \\y''' &= \frac{-s(ms - n^2)(z - t)}{(ms - 2n^2)(zu - tv) - ns(u - v)}\end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Intanto la retta, che passa pe' punti (x'', y'') , (x''', y''') avendo per equazione

$$y - y'' = \frac{y''' - y''}{x''' - x''}(x - x'')$$

pel caso di $y = 0$, da

$$x = \frac{y'' x''' - x'' y'''}{y''^2 - y'''^2}$$

e rimpiazzando per x'' , y'' ; x''' , y''' i loro valori determinati in (7), e (8), avremo immanentemente la seguente espressione

$$x = \frac{(z - t)(ms - n^*) \left((ns - ns)(zu - tv) + (s^* - s^*)(u - v) \right)}{(z - t)(ms - n^*) \left(2(ms - n^*)(zu - tv) + (ns - ns)(u - v) \right)}$$

espressione, che riducesi ad

$$x = \frac{0}{2(ms - n^*)(uz - tv)} = 0$$

Donde rilevasi, che la retta che passa pe' concorsi delle tangenti passa benanche per l' origine delle ascisse, cioè pel punto in cui s^* incontrano le due corde.

OSSERVAZIONE.

Il semplice confronto di questa dimostrazione puramente algebrica, con quella geometrica, che ne fu precedentemente esibita, basterà a far rilevare quanto questa a quella prevalga in chiarezza e brevità. Potrebbe forse, guardandosi la quistione sott' altro punto di vista, consegnarsele qualche dimostrazione men complessa: ma comunque possa rendersi semplice non sarà mai da preferirsi a quella geometrica. Al che aggiungeremo non potersi da' risultamenti analitici, cui con quel metodo siam pervenuti, dedurre alcuna delle conseguenze che intuitivamente abbiamo rilevate dalla dimostrazione geometrica, per ognuna del-

le quali oscurterebbe una nuova dimostrazione. Finalmente deve osservarsi, che il teorema di cui trattasi, poteva solamente da geometriche considerazioni derivare; nè pare che alcuno, senza conoscerlo, avesse mai potuto ravvisarlo tra formole algebriche risultanti da qualsivoglia calcolazione.

3.° Abbiamo finora considerato un quadrilatero iscritto in una curva conica, e le proprietà, che offrono le sue diverse parti: considereremo ora un secondo quadrilatero iscritto nella medesima, avente un lato comune col primo. Sia questo il quadrilatero iscritto $EDbc$, che abbia il lato DE comune con $EDBC$. Congiunti i vertici opposti di questi due quadrilateri colle rette Cb , Bc , risulterà un terzo quadrilatero, che diremo *quadrilatero risultante*, del quale chiameremo *lati opposti al lato comune* i lati Cb , Bc : e semplicemente *lati opposti* i rimanenti CB , cb .

* fig. 5.

Ciò premesso sieno A , a i punti di concorso dei lati opposti dei primi due quadrilateri sul lato comune, S , s le intersezioni delle rispettive diagonali, H , h i poli di BC , bc , lati opposti del quadrilatero risultante, e K polo del lato comune DE . I quattro punti A , H , S , K staran per dritto, al pari degli altri a , h , s , K , e ciascuna delle rette AK , aK rimarrà armonicamente divisa in quei quattro punti. Le congiungenti adunque Aa , Hh , Ss dovranno concorrere in un medesimo punto, se pur non sieno tra loro parallele. Intanto sia a' il punto di concorso di Cb , Bc , lati del quadrilatero risultante opposti al lato comune, ed s' il punto d'intersezione delle sue diagonali; anche i quattro punti a' , h , s' , H staranno in linea retta. Or si tirino le KM , hc' parallele ad HC , e Km parallela ad hb ; avremo le tre analogie

$$Ka : ah :: Km : bh \quad (1)$$

$$KA : AH :: KM : HC \quad (2)$$

$$Ha' : a'h :: HC : hc' \quad (3)$$

Inoltre sia k polo di Cb , ed R il punto in cui a' incontrano le Db , EC ; i punti K , R , k staranno in linea retta; e perciò essendo KM parallela a Ck , e Km parallela a Kb , risulterà Mm parallela a Cb , ossia a bc' . Quindi si avrà $Km : bh :: KM : hc'$, ovvero $Km : bh :: (KM : HC)(HC : hc')$. E sostituendo a queste tre ragioni le loro eguali espresse nelle analogie (1), (2), e (3), otterremo

$$Ka : ah = (KA : AH) (Ha' : a'h)$$

dalla quale rilevasi, che i tre punti A , a , a' debbano star per dritto (*V. Flauti geom. di sito, nota alla prop. XXI. §. 9.*). Val quando dire le quattro rette Aa , Cb , Hh , Bc concorron tutte in a' ; ma si è detto, che Aa , Hh , Ss concorrevano pure in un punto; dunque anche la Ss converrà colle altre nel medesimo punto a' . In conseguenza di che avremo il seguente

TEOREMA 12.°

Se due quadrilateri iscritti hanno un lato comune, concorranno in un sol punto le seguenti cinque rette, cioè

1. retta — *La congiungente delle intersezioni delle rispettive diagonali,*

2. retta — *La congiungente de' punti di concorso dei loro lati opposti giacenti sul lato comune.*

3. retta — *La congiungente dei poli dei lati opposti del quadrilatero risultante.*

4., e 5. retta — *E finalmente i due lati del quadrilatero istesso opposti al lato comune.*

COROLLARIO 1.^o

4.^o Se assumasi BC per lato comune de' due quadrilateri $BCEd, BCbc$, le cinque rette che deggion concorrere in un punto, saranno Ec, Ka, Db, Se', Aa' , e sarebbe a il punto di concorso. Ed assumendo poi bc come lato comune dei due quadrilateri $cbCB, cbDE$, le cinque rette saranno rappresentate dalle $DB, KH, EG, ss', a'a$, e tutte concorrerebbero nel punto A .

COROLLARIO 2.^o

5.^o Suppongasi che i lati opposti di uno de' due quadrilateri sul lato comune sian tra loro paralleli, (come nel quadrilatero $EDBC$); svanendo in tal caso il punto A , la aa' dovrà risultar parallela a quei lati paralleli. E se contemporaneamente anche l' altro quadrilatero $EDbc$ abbia paralleli i suoi lati sul lato comune *, svanendo il punto a , svanirà con esso il punto a' . Val quanto dire i lati Cb, Bc del quadrilatero risultante opposti al lato comune saranno eziandio paralleli tra loro, e paralleli alle Se, HA . D' onde ricavasi il seguente elegantissimo

* fig. 6.

* fig. 7.

TEOREMA 13.^o

Se da due punti (D, E) del perimetro di una curva conica si conducano comunque due coppie di corde parallele ($DB, EC; Db, Ec$), le congiungenti delle loro estremità opposte (Bc, Cb) risulteranno benanche parallele.

Ma di questa importante verità, di cui occorre sovente far

uso o ne sarà data in opportuna occasione altra breve, diretta, e semplice dimostrazione (*).

6.*Perchè intanto si vegga con qualche esempio qual uso vantaggioso possa farsi, nell'analisi de' problemi delle verità qui sopra esposte, ci faremo in primo luogo a mostrare come dal teorema 12. possa ricavarsi un' immediata novella soluzione del notissimo problema di : *iscrivere in una data curva conica un triangolo, i di cui lati passino per tre punti dati*. Ed in vero riflettendo che ne' tre quadrilateri $EDBC$, $EDbc$, $BCbc$ le sei diagonali formano tre a tre due triangoli iscritti DCc , EBb , i di cui lati passano per i punti S , s , s' , se supponesi che siffatti punti sian dati, i tre punti A , a , a' dovranno trovarsi sopra tre rette date di sito, polari rispettive dei punti medesimi *. Ma que' tre punti deggiono pur trovarsi rispettivamente sulle altre rette ss' , Ss' , Ss , anche date di sito, per esser dati i punti s , s' , S ; dunque i punti A , a , a' saranno dati: e con ciò venendo ad esser date di sito le rette AS , as , $a's'$, i punti K , H , h , ove quelle rette s' incontrano due a due saranno dati. Quindi sarà pur data la posizione di ciascuna, delle tangenti KE , KD , HC , HB , hc , hb ; e poichè i punti di contatto corrispondono ai vertici di due triangoli iscrivibili secondo la proposta condizione, il problema rimarrà risoluto. Intanto sul riflesso, che basti un solo de' tre punti K , H , h

* *loc. cit.*

(*) In una nostra memoria, che verrà tra poco pubblicata, riguardante il problema generale della iscrizione de' poligoni nelle curve coniche con date condizioni.

per la effettiva iscrizione del richiesto triangolo , si avrà pel problema la seguente composizione.

Si assegnino le PP, pp , polari di due de' dati punti, S, s , le congiungenti dei quali col terzo s' le incontrino in A, a . Si uniscano le AS, as , e dal punto K , ove s'incontrano, si tirino le tangenti KE, KD .

Ciascuno de' punti D, E sarà il vertice di un triangolo che risolve il problema .

OSSERVAZIONE.

Non pare, che siasi presentata finora soluzione più semplice di un problema, che pel caso solo del cerchio ha travagliate per sì lungo tempo le menti de' matematici più distinti. Intanto noi qui non ad altro fine l'abbiam data, che come saggio dell'efficacia del teorema più sopra esposto, riserbandoci di tornare sullo stesso argomento in altra memoria, ove daremo altre soluzioni, ed interamente diverse, del medesimo problema, generalizzandolo per qualsivoglia numero di punti dati, essendo la quassù recata applicabile al solo caso de' tre punti.

Potrebbe intanto sembrare che siffatta soluzione valga solo pel caso in cui i punti dati si trovino dentro la curva, mentre essi veggonsi corrispondere ad intersezioni di diagonali di quadrilateri. Ma riflettendo che siffatte intersezioni possono benanche cadere al di fuori della curva, come si è fatto avvertire nella nota a pag. 9, si vedrà, che l'addotta soluzione regga sempre sia, che i dati punti stiano dentro, sia che stiano fuori la curva.

7.° Per dare un secondo esempio dell' utilità del precedente teorema , mostreremo per mezzo di esso , che regga per tutte le curve coniche identicamente come pel cerchio quel lemma che risulta dalla prop. cxvii. delle *Collezioni matematiche* di Pappo , e del quale seppe sì bene valersi il Giordano per la soluzione del problema di Cramer : e non esitiamo a credere dover ciò recare grata sorpresa a' geometri ; sembrandoci , per quanto è a nostra conoscenza , che questa proprietà de' conici non sia stata finora da altri avvertita .

* fig. 8.

Sien dunque da due punti fissi A, B inflesse a qualunque punto C del perimetro di una curva conica le AC, BC , che di nuovo lo incontrino in E, G , e condotta da una di queste intersezioni , per esempio da E la corda EF parallela ad AB , si tiri la FGD . Da que' medesimi punti s' inflettano poi ad arbitrio altre due secanti Ace, Bgc , e si tiri l' altra corda ef parallela ad AB , ossia ad EF . Ciò posto si congiungano le Eg, eG , le quali s'incontrino in M : considerando eE come lato comune de' due quadrilateri iscritti $eECe, eEgG$, i tre punti M, B, A dovranno

* teor. 12.

star per dritto . Considerando poi la stessa eE come lato comune de' due quadrilateri $eEFf, eEgG$, il primo de' quali ha paralleli i lati EF, ef , il punto D , concorso delle GF, gf dovrà

* c. 2. l. 12.

trovarsi sulla AB . Essendo dunque arbitraria la posizione delle seconde inflesse Ace, Bgc , ne risulta essere invariabile il punto D , qualunque sia il loro sito . Quindi si ha il seguente

TEOREMA 14°.

Se da due punti A, B dati nel piano di una curva conica s' inflettano a qualunque punto del suo perimetro le AC, BC , e

da uno dei punti in cui l'incontrano di bel nuovo, per esempio da E , si tiri la corda EF parallela ad AB , la congiungente dell'estremità F di questa corda coll'altra intersezione G incontrerà la AB sempre in un medesimo punto D .

E ciò basti per ora intorno a questo argomento, riserbando-
ci di riprenderlo in altra memoria, ove mostreremo come tal ve-
rità si rilevi facilmente da un'ovvia proprietà delle sezioni co-
niche, o da' modernissimi metodi analitici; e come possa util-
mente applicarsi.

8.° Finalmente per un terzo esempio è da osservarsi, che la * fig. 5.
figura $DBcECD$ sia un esagono iscritto, terminato da' lati
 DB , Bc , cE , EC , Cb , bD , de' quali gli opposti sareb-
bero precisamente DB con EC , Bc con Cb , e cE con bD ; e por-
chè questi lati opposti concorrono ne' tre punti A , a' , a ,
situati in linea retta, ne segue.

TEOREMA 15°.

*I punti di concorso de' lati opposti di un esagono iscritto in
una curva conica sono alligati in una retta.*

Questa verità, che vedesi qui dedotta per immediata conse-
guenza dei nostri principj è il celebre teorema dovuto all'insigne
Pascal, a dimostrare il quale sonosi ingegnati i più distinti geo-
metri: ma tra le altre è degna di attenzione la dimostrazio-
ne congegnata dal Gergonne col metodo delle coordinate nel
vol. 3. dei suoi *Annali*.

